

1) **Sumą algebraiczną** podprzestrzeni V_1 i V_2 przestrzeni wektorowej V nazywamy zbiór:

$$V_1 + V_2 := \{v \in V : \exists v_1 \in V_1 \quad v_2 \in V_2 : v = v_1 + v_2\} = \{v_1 + v_2 : v_1 \in V_1 \wedge v_2 \in V_2\}.$$

Jeżeli dodatkowo przedstawienie $v = v_1 + v_2$ jest jednoznaczne dla dowolnego elementu tego zbioru, to sumę algebraiczną nazywamy **sumą prostą** i oznaczamy $V_1 \oplus V_2$.

2) Niech V_1, V_2 - podprzestrzenie wektorowe w przestrzeni V . Wtedy:

$$V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2 \iff V_1 \cap V_2 = \{\bar{0}\}.$$

3) Jeśli V_1 jest podprzestrzenią przestrzeni wektorowej V to podprzestrzeń V_2 przestrzeni V taka, że $V = V_1 \oplus V_2$ nazywamy **dopełnieniem** (podprzestrzenią uzupełniającą) podprzestrzeni V_1 do V .

4) Dla dowolnych skończenie wymiarowych podprzestrzeni V_1, V_2 przestrzeni wektorowej V nad ciałem $\mathbb{K}$ mamy:

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

Zadanie 1. Znajdź $U_1 + U_2$ jeśli:

a) $U_1 = \text{lin}\{(1, 2, -1)\}, U_2 = \text{lin}\{(2, -3, 1), (2, 2, -1)\},$

b) $U_1 = \{t(-x^3 + x^2) + s(x - 1)\}, U_2 = \{p(-x^3 + x^2 - x + 1) + q(x^3 + 1)\}, t, s, p, q \in \mathbb{R},$

Zadanie 2. W przestrzeni V dana jest baza $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Niech:

$$V_1 = \text{lin}\{2e_1 + e_3 - e_4, e_1 + e_2\},$$

$$V_2 = \text{lin}\{e_1 + e_2 + e_3 + e_4, e_2 - e_3\},$$

$$V_3 = \text{lin}\{e_2 + e_3 - 3e_1, e_2 + 2e_4\}.$$

Sprawdź, czy $V = V_1 \oplus V_2, V = V_1 \oplus V_3, V = V_2 \oplus V_3$.

Zadanie 3. Rozłóż przestrzeń V na sumę podprzestrzeni $U \oplus W$ tak, by:

a) $U = \text{lin}\{x^2 + 2x - 1, -x^2 + x + 2\}, V = \mathbb{R}[x]_2,$

b) $U = \text{lin}\left\{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right\}, V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R}).$

Zadanie 4. Sprawdź, czy $U + W = U \oplus W$, jeśli:

$$U = \text{lin}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \quad W = \text{lin}\left\{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

Zadanie 5. Niech:

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + t = 0, 2y + z - t = 0\} \text{ oraz } W = \text{lin}\{(1, 1, -1, 1), (0, -2, 1, -1), (3, 0, -2, 2)\}.$$

Zbadaj, czy $V + W = V \oplus W$. Jeżeli nie, znajdź podprzestrzeń U , żeby $V \oplus U = \mathbb{R}^4$.